Ανάλυση της λογικής του ζηνωνείου επιχειρήματος «εναντίον της πολλαπλότητας»

Γιώργος Χάιλος,
Αν. Καθηγητής Πανεπιστημίου Λευκωσίας

1. Εισαγωγή

Σ' αυτό το άρθρο αναλύουμε τη λογική του ζηνωνείου επιχειρήματος (παραδόξου) «Εναντίον της Πολλαπλότητας», όπως αυτό παρουσιάζεται στο έργο του Σιμπλίκιου, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη, 139, 5 - 139, 19 και 140, 27 - 141, 8*. Από την ανάλυση του επιχειρήματος εξάγονται δύο συλλογισμοί, οι οποίοι οδηγούν σε αντιφατικά συμπεράσματα (όπως ο Ζήνων επεχείρησε να δείξει). Ανακατασκευάζουμε το Επιχείρημα και αναλύουμε λεπτομερώς το δεύτερο συλλογισμό και τα αντιφατικά συμπεράσματα που απορρέουν από αυτόν με στόχο να δείξουμε ότι ο συλλογισμός είναι λογικά «μη ορθός», και για αυτό το λόγο εξάγονται τα ζηνώνεια αντιφατικά συμπεράσματα. Ακολούθως αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο η μέθοδος της εξαντλήσεως του Ευδόξου του Κνιδίου, η οποία παρουσιάζεται συνοπτικά στο *παραρτημα 2* του παρόντος, αποτελεί τη βασική αρχή για την άρση των λογικών αδυναμιών και των αντιφάσεων του δευτέρου συλλογισμού του εν λόγω επιχειρήματος[1].

2. Ελεατική Φιλοσοφία-Προσέγγιση

'Τα παράδοξα[2] του Ζήνωνος' είναι ο τίτλος ο οποίος έχει αποδοθεί ιστορικά σε τέσσερεις προβληματισμούς, τους οποίους θέτει ο Ζήνων σχετικά με τη δυνατότητα της κίνησης-μεταβολής και περιγράφει ο Αριστοτέλης στα *Φυσικά*. Κατόπιν εντάχθηκε στα 'Παράδοξα' και το περίφημο 'Επιχείρημα κατά της Πολλαπλότητας' (το μοναδικό έργο του Ζήνωνα, το οποίο διασώζει ο Σιμπλίκιος στα «Σχόλια στα Φυσικά: 139, 5 - 139, 19 και 140, 27 -141, 8»).

Η φιλοσοφία των Ελεατών υπαγόρευε την αναζήτηση της αλήθειας μέσω της σκέψης και όχι μέσω των αισθήσεων, γιατί κατά την άποψή τους αυτές παραπλανούν. Γι' αυτό κυρίως το λόγο η ελεατική σχολή επικεντρώνεται στην ανάλυση της λογικής δομής του χωροχρόνου και των μεταβολών (κίνησης) με στόχο να ερμηνεύσει-με λογικά επιχειρήματα και μόνον-τα φαινόμενα που προκύπτουν. Σύμφωνα με αυτή τη γραμμή σκέψης, ο Καρτέσιος [3], στο τέταρτο άρθρο του δευτέρου μέρους της Φιλοσοφίας του, υποστηρίζει ότι τα χαρακτηριστικά της ύλης (όπως το βάρος, το χρώμα, η στε-

[1] Η πλήρης άρση έχει επιτευχθεί με βάση την πλήρη θεωρία του Απειροστικού Λογισμού , Ιδέ: Tiles M. (1989), *The Philosophy of Set Theory*, Dover Publ., σελ 12-21, 70, 93, 217.

[2] Θα ήθελα να επισημάνω ότι θεωρώ πως ο όρος «Παράδοξα» είναι προβληματικός και παραπλανητικός, μιας και παραπέμπει τους περισσότερους σε γρίφους ή αινίγματα τα οποία χρειάζονται λύση ή ακόμα σε παραλογισμούς. Πιστεύω πως δόκιμοι είναι οι όροι «προβληματισμοί και επιχειρήματα» (κατά της κίνησης και της πολλαπλότητας).

[3] R. Descartes (2012). *Οι Αρχές της Φιλοσοφίας I&II*, μετφρ. Γρηγοροπούλου Β., Εκδ. Εκκρεμές, Αθήνα 2012, σελ. 170-173.

ρεότητα και τα παρόμοια) δεν συνιστούν την φύση της ύλης, αλλά ιδιότητές της. Καθώς εάν αφαιρέσουμε π.χ. την στερεότητα, αφαιρούμε μόνο το αίσθημα εκείνο, το οποίο προκαλεί την σκληρότητα, όταν αγγίζουμε το αντικείμενο. Όπως πολύ ωραία σημειώνει και η Β. Γρηγοροπούλου, 'ο Ντεκάρτ έχει κατά νου την γεωμετρική-μαθηματική έννοια της έκτασης, ανεξαρτήτως των υλικών ιδιοτήτων του πράγματος'[4], προσέγγιση δηλαδή που άπτεται της ελεατικής. Αυτή η φιλοσοφία και προσέγγιση της ελεατικής σχολής την έφερε σε ευθεία αντιπαράθεση με αυτή των Φυσιολόγων-Φυσικών φιλοσόφων (Θαλής ο Μιλήσιος, Αναξίμανδρος, Ηράκλειτος) οι οποίοι υποστήριζαν ότι ο κόσμος εξαντλείται σε ότι βλέπουμε και γενικά με τις αισθήσεις, εξετάζοντας τις ιδιότητες κάθε πράγματος ξεχωριστά. Εκτός από τους Φυσιολόγους και ο Αριστοτέλης αντιτίθετο στα διδάγματα της ελεατικής σχολής. Γι' αυτό ασχολήθηκε συστηματικά με τη διάψευση των επιχειρημάτων των Ελεατών.

Σήμερα αναγνωρίζεται πως η σχολή συνέτεινε στην θεμελίωση του ορθού προβληματισμού καθώς και στην καθιέρωση της ορθής πορείας μιας επιχειρηματολογίας.

Στον πυρήνα της λογικής ανάλυσης της ελεατικής σχολής βρίσκεται η μέθοδος της 'εις άτοπον απαγωγής'[5]. (Μέθοδος η οποία σιωπηρά υιοθετεί την «Αρχή του Αποκλειόμενου Μέσου» και την «Αρχή της μη Αντίφασης»). Αυτό το δηλώνουν σαφώς ο Πλάτων[6] και ο Σιμπλίκιος, όσο αφορά στο επιχείρημα κατά της πολλαπλότητας:

[4] Εδώ θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φοιτητή της Φιλοσοφικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, Παναγιώτη Μπάσδο, για τις εύστοχες επισημάνσεις του, όσο αφορά στη συσχέτιση της ελεατικής προσέγγισης με το έργο του Καρτεσίου.

[5] McKirahan R.D. JR., Zeno, in A.A.Long (1999), *The Cambridge companion to Early Greek Philosophy*, Cambridge University Press, 1999.

[6] Ο Πλάτων αφιέρωσε το μεγαλύτερο μέρος του διαλόγου του «Παρμενίδης» για να ασκήσει κριτική στις παρμενίδειες-ελεατικές θέσεις, καθώς και στην (ζηνώνεια) επιχειρηματολογία ότι «αν τα όντα

1) Πλάτων, *Παρμενίδης*, 128d4 - d6: 'τοῦτο βουλόμενον δηλοῦν, ὡς ἔτι γελοιότερα πάσχοι ἂν αὐτῶν ἡ ὑπόθεσις, εἰ πολλά ἐστιν'. «Ο σκοπός της [πραγματείας] είναι να δείξει ότι η υπόθεση αυτών που ισχυρίζονται την ύπαρξη πολλών όντων είναι ακόμα πιο παράλογη (γελοιότερη) .»

2) Σιμπλίκιος, *Εις Φυσικά*, 139,6 - 7: 'καθ' ἕκαστον δείκνυσιν, ὅτι τῷ πολλὰ εἶναι λέγοντι συμβαίνει τὰ ἐναντία λέγειν'. Μετφρ: «δεικνύει λεπτομερώς, ότι αυτός ο οποίος ισχυρίζεται ότι τα όντα είναι πολλά, καταλήγει στα αντίθετα συμπεράσματα [σε άτοπον].»

Και σε γενική μορφή ο Αριστοτέλης:

3) Αριστοτέλης, *Αναλυτικά Πρότερα*, 65b16 – 65b19: «τὸ γὰρ τὸ ἀναίτιον ὡς αἴτιον τιθέναι τοῦτό ἐστιν, οἷον εἰ βουλόμενος δεῖξαι ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος, ἐπιχειροίη τὸν Ζήνωνος λόγον, ὡς οὐκ ἔστι κινεῖσθαι, καὶ εἰς τοῦτο ἀπάγοι τὸ ἀδύνατον» .

Μετφρ: «Το να υποθέτει κανείς την μή αιτία [του συμπεράσματος] ως αιτία σε τούτο έγκειται, όπως [στο πιο προφανές παράδειγμα - της μη ύπαρξης συλλογιστικού δεσμού ανάμεσα στην υπόθεση και το αδύνατο συμπέρασμα] όταν κάποιος προσπαθεί να αποδείξει ότι η διάμετρος [του τετραγώνου] είναι ασύμμετρος [προς την πλευρά] χρησιμοποιώντας το επιχείρημα του Ζήνωνα και δείχνοντας ότι [αν η πλευρά ήταν σύμμετρος] η κίνηση θα ήταν αδύνατη, κι έτσι ανάγοντας [το επιχείρημα] στο αδύνατο.»

Διακρίνεται επομένως η αποδεικτική διαδικασία που επιλέγει ο Ζήνωνας. Επιχειρώντας να αποδείξει ότι τα πολλά δεν υπάρχουν ή ότι η κίνηση είναι αδύνατη, υποθέτει την ορθότητα της αντίθετης θέσης, και βάσει αυτής κατασκευάζει επιχειρήματα πως τα πολλά υπάρχουν ή πως η κίνηση εί-

---

είναι πολλά, τότε πρέπει συνάμα να είναι όμοια και ανόμοια, άπειρα και πεπερασμένα».

ναι δυνατή. Ακολούθως με κατάλληλους και πειστικούς λογικούς συλλογισμούς εξάγει αντιφατικά συμπεράσματα.

Κατά τον Παρμενίδη και γενικά τους ελεάτες, η ύπαρξη, το ‘ον-είναι’ θεμελειώνεται στο νοείν και το νοείν στο όν. Δεν υπάρχει νοείν χωρίς ‘είναι’, ενώ το ‘ον-είναι’ αναδύεται μόνο ως νοούμενο. Τοιουτοτρόπως νοείν και είναι ταυτίζονται (μη τυπικά) σε μία σχέση άρρηκτης αλληλεξάρτησης[7]. Επιπροσθέτως, αυτό που πραγματικά υπάρχει είναι ένα, αδιαίρετο, άναρχο, πεπερασμένο και αμετάβλητο.[8] Το ‘ον’ λοιπόν είναι ‘εν’, ενώ κατά τους επικριτές του ‘πολλά’, και όπως μας πληροφορεί ο Πλάτων τα ‘πολλά’ στα οποία αναφέρεται ο Ζήνων είναι ακριβώς το αντίθετο του ‘εν’ (του ενός-μονισμού) του Παρμενίδη. Αφού λοιπόν το ‘εν’ είναι κατά τον Παρμενίδη νοητό ον, τα πολλά δεν μπορεί παρά να είναι τα μη νοητά-αισθητά πράγματα, ό,τι δηλαδή αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας. Όπου λοιπόν διαβάζουμε ‘πολλά’ πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι ο Ζήνων δεν εννοεί απλά και μόνον κάποιον αριθμητικό προσδιορισμό διαφορετικό του «ενός», αλλά γενικώς τα αισθητά πράγματα και την αισθητηριακή γνώση (η οποία είναι πλανερή κατά τους Ελεάτες)[9]. Έτσι λοιπόν ο Ζήνων, σύμφωνα με την αποδεικτική μέθοδο της ‘εις άτοπον απαγωγής’, υποθέτει αρχικά ότι αν ο αισθητός κόσμος, η αισθητηριακή αντίληψη και οι έννοιες που σχετίζονται με αυτήν (κίνηση, χώρος, χρόνος κ.λπ.) είναι αληθείς, τότε οδηγούμαστε σε λογικά παράδοξα. Και άρα η αρχική υπόθεση είναι ψευδής.

[7] Ν. Αυγελής (2001), *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία*, Θεσαλλονίκη, 2001, σελ 124.

[8] Ο.π., σελ 120-131.

[9] Πρωτοπαπάς Δ. (2013), *Παρουσίαση της Ανθυφαιρετικής Ερμηνείας των Παραδόξων Κίνησης και των επιχειρημάτων Πολλαπλότητας του Ζήνωνα*, Διπλ. Εργ., Εθν. Καποδ. Παν. Αθηνών/Παν. Κύπρου, 2013.

Δηλαδή επιχειρεί να αποδείξει ότι ο αισθητός κόσμος δεν είναι αληθής (‘παραπλανεί’). Και άρα (σύμφωνα με την ελεατική σχολή) το μόνο αληθές είναι η σκέψη-νοείν, ο Λόγος.

3. Το Επιχείρημα Εναντίον της Πολλαπλότητας- Συλλογισμοί-Αντιφάσεις

Το επιχείρημα βρίσκεται στο έργο του Σιμπλίκιου *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*,

139,5 – 139,19 και 140,27 - 141,8 (Ιδέ Παράρτημα 1 του παρόντος για το πρωτότυπο κείμενο καθώς και για τις μεταφράσεις στην αγγλική και στη νέα ελληνική)**.** Ο Σιμπλίκιος ισχυρίζεται ότι έχει διασώσει αυτούσιο το επιχείρημα του Ζήνωνα. Το χωρίο είναι κάπως προβληματικό και κάποια τμήματα του λείπουν ή δεν είναι ευκρινή.

Ο Ζήνων επιχειρεί να αποδείξει ότι η υπόθεση «Υπάρχουν πολλά πράγματα» (« ὅτι εἰ πολλά ἐστι», 139,8) οδηγεί σε αντίφαση και μάλιστα σε δύο αντιφάσεις:

1ος Συλλογισμός:

- Υπόθεση: Εάν υπάρχουν πολλά πράγματα (« ὅτι εἰ πολλά ἐστι»).
- Απόδοση (1): Τα ίδια πρέπει να είναι και πεπερασμένα και άπειρα [στο πλήθος] **«**(«τὰ αὐτὰ πεπερασμένα ἐστὶ καὶ ἄπειρα»... « γράφει ταῦτα κατὰ λέξιν ὁ Ζήνων») (140, 28-29).

Το Αντιφατικό συμπέρασμα του 1ου *συλλογισμού είναι:* Τα ίδια πράματα είναι ταυτοχρόνως πεπερασμένα και μη πεπερασμένα (άπειρα) όσο αφορά στο πλήθος.

2ος Συλλογισμός:

- Υπόθεση: Εάν υπάρχουν πολλά πράγματα (« ὅτι εἰ πολλά ἐστι»).

- Απόδοση (2) (η οποία αποτελείται από δύο σκέλη): Είναι αναγκαίο να είναι και μικρά και μεγάλα, τόσο μικρά ώστε να μην έχουν μέγεθος, και συνάμα τόσο μεγάλα ώστε να είναι άπειρα [στο μέγεθος]. («…ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα, μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι»). (139,8-10)

Δηλαδή ο Ζήνων 'αποδεικνύει' ότι κάθε πράγμα είναι ταυτόχρονα «απείρως μικρό» και «απείρως μεγάλο.»

Τα *Αντιφατικά συμπεράσματα του* 2^{ου} *συλλογισμού είναι*:

Α. Κάθε πράγμα είναι «τόσο μικρό ώστε δεν έχει μέγεθος (έχει μηδενικό μέγεθος),

«μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος».

Β. Κάθε πράγμα είναι «τόσο μεγάλο ώστε δεν έχει πέρας» (είναι απειρομέγεθες), «μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι».

Τα δύο αυτά σκέλη του δευτέρου συλλογισμού στο όλο επιχείρημα του Ζήνωνα υποστηρίζονται χρησιμοποιώντας την 'Αρχή της Άπειρης διαιρετότητας' και την 'Αρχή του Απειροαθροίσματος' (και θα μας απασχολήσουν στο υπόλοιπο του άρθρου).

4. Ανακατασκευή και Ανάλυση του Επιχειρήματος-2^{ος} Συλλογισμός

(Ιδέ επίσης Παράρτημα 1 του παρόντος για το πρωτότυπο κείμενο)**:**

Ο Ζήνων αρχίζει το δεύτερο συλλογισμό με την ακόλουθη θέση, την οποία λογικά «στηρίζει» χρησιμοποιώντας την αρχή της «εις άτοπον απαγωγής».

«εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου…, (141, 2-3)». Δηλαδή, εάν κάτι υπάρχει (ως φυσική οντότητα), τότε αυτό έχει κάποιο μέγεθος και κάποιο πάχος και είναι χωριστό από τα άλλα. (Ο Ζήνων υποθέτει ότι οι αντίπαλοί του (υλιστές-πλουραλιστές) όντως αποδέχονται αυτήν τη θέση).

Επίσης το κείμενο του Σιμπλικίου (139, 8-16) περιέχει και το εξής επιχείρημα:

«Έστω χ τυχόν υπαρκτό πράγμα-ον, έχον μηδενικό μέγεθος. Τότε όταν το χ προστεθεί σε ένα πράγμα, δεν αυξάνει το μέγεθος αυτού του πράγματος. Και όταν το χ αφαιρεθεί από ένα πράγμα, δε μειώνει το μέγεθος του πράγματος. Έτσι προφανώς το χ είναι τίποτα-μηδέν, δηλαδή δεν υπάρχει» (139,8-16).

Έτσι το επιχείρημα αρχίζει με την υπόθεση:

1. Ό,τι υπάρχει, έχει κάποιο μέγεθος («...εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν... (141,2-3)»).

Από ότι παρατηρούμε στα κείμενα του Σιμπλικίου ο Ζήνων φαίνεται να παραδέχεται και τις εξής υποθέσεις:

2. Ό,τι έχει μέγεθος μπορεί να τμηθεί-διαιρεθεί σε άπειρα γνήσια (γ-) μέρη τα οποία είναι υπαρκτά.

«ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξύ. Καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί. Καὶ οὕτως μὲν τὸ κατὰ τὸ πλῆθος ἄπειρον ἐκ τῆς διχοτομίας ἔδειξε» (140,33-34) αλλά και στο (139,16-18).

3. Η Σχέση: x **«**γνήσιο μέρος του**»** y [10], ή « x γ-μέρος του y » είναι διμελής, μεταβατική, αντιανακλαστική και μη συμμετρική (Ιδέ Παράτημα 1, 140, 31-32 και 141, 3-5).

10 Cohen M.S., Zeno's paradoxes, 2002, from http://faculty.washington.edu/smcohen/320/tmalect.htm

Γνήσια Μέρη: x « γνήσιο γ-μέρος του» y, εάν και μόνο εάν, x «μέρος του» y,
αλλά y δεν είναι «μέρος του» x.

Μεταβατικότητα: Εάν x «γ-μέρος του» y και y «γ-μέρος του» z ,τότε το
x είναι «γ-μέρος του» z.

Αντιανακλαστικότητα: Το x δεν είναι «γ-μέρος του» x .

Μη συμμετρικότητα: Εάν x «γ-μέρος του» y, τότε y δεν είναι «γ-μέρος του» x .

Το υπόλοιπο επιχείρημα σώζεται στα *Σχόλια στα Φυσικά*, 140, 27 – 141, 8 του Σιμπλικίου, και ανακατασκευάζοντάς το έχει ως ακολούθως**:**

4. Έστω τυχόν υπαρκτό (φυσικό) αντικείμενο x.
5. Το x έχει μέγεθος (από την 1 και 4).
6. Το x έχει γνήσια μέρη (από τη 2 και 5).
7. Έστω x_1 ένα από αυτά τα μέρη. Τότε αναγκαία το x_1 πρέπει να «είναι ξέχωρο μέρος από το υπόλοιπο» x. Έτσι ένα μέρος του αρχικού x (δηλαδή το x_1) πρέπει να προέχει, να είναι μπροστά δηλαδή, από το υπόλοιπο x, δηλαδή το $x-x_1$, όπως λέει ο Ζήνων: «...ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. **καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος.**» (141, 3-5). Διαγραμματικά,

$x - x_1$ x_1

Τώρα ο Ζήνων ισχυρίζεται ότι το αυτό (το επιχείρημα από το 5-7 δηλαδή) πρέπει να ισχύει και για το x_1 **και ότι η αυτή διαδικασία εκτείνεται επ' άπειρον.**

8. Ώστε κάποιο μέρος του x_1 (ας το καλέσουμε x_2) προέχει από το υπόλοιπο x_1 , και η

αυτή λογική διαδικασία εκτείνεται επ' άπειρον, *ad infinitum*. «.... **καὶ περὶ τοῦ**

προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι.

ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν» (141, 2-5)**.**

Διαγραμματικά,

$$x - x_1 \qquad x_1 - x_2 \qquad x_2 - x_3 \qquad x_3$$

Επειδή ο Ζήνων υποθέτει, και πολύ βάσιμα, ότι η σχέση «γ-μέρος του» είναι

μεταβατική (δηλαδή τα γ- μέρη των γ-μερών του x είναι και γ-μέρη του x), τότε

συμπεραίνει ότι το x συνίσταται από ένα άπειρο πλήθος «γ-μερών», δηλαδή των

$x_1, x_2, x_3, x_4\ldots$ κ.ο.κ., επ' άπειρον-*ad infinitum* , τα οποία είναι όλα γ-μέρη του αρχικού

μεγέθους-αντικειμένου x .

9. Έτσι από τις 8 και 3 το x έχει άπειρα κατά διαίρεση το πλήθος μέρη. (**Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας**[11]).

Από αυτό ο Ζήνων εξάγει 'αβίαστα' το συμπέρασμα ότι ***ένα αντικείμενο το οποίο συνίσταται από άπειρα το***

[11] Fraenkel H., *Zeno of Elea's attacks on plurality*. In Allen, R.E. and Furley, D.J. (Eds.), Studies in Presocratic Philosophy, 2, London: Routledge & Kegan Paul, 1975., pp. 102-142.

πλήθος μέρη, αναγκαία είναι και απειρομέγεθες. *Συμπέρασμα το οποίο εξάγεται μόνο εάν υιοθετηθεί μία επιπλέον «Κρυμμένη Υπόθεση»* (*Ιδέ και πάρα κάτω*).

10. Άρα το x είναι απειρομέγεθες (από την 9 και την *Κρυμμένη Υπόθεση*).

(139, 8-9 και 141, 6-8) «οὕτως εἰ πολλά ἐστιν...μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι.»

5. Κριτική του επιχειρήματος του 2^{ου} συλλογισμού

Η επιχειρηματολογία κυλά ομαλά μέχρι και το βήμα 9. Όμως το 9 δεν επάγει το 10. (Το 10
δε συνεπάγεται από το 9) . Ο Ζήνων φαίνεται ότι υιοθετεί εμμέσως την *«Κρυμμένη*
Υπόθεση» , την λεγόμενη *«Αρχή του Απειροαθροίσματος»*. Τοιουτοτρόπως ο συλλογισμός αυτός αποτελεί ενθύμημα.

Αρχή του απειροαθροίσματος*--«Κρυμμένη Υπόθεση».*
Το άθροισμα ***απείρου αριθμού θετικών όρων*** $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *είναι άπειρο. Συμβολικά:* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$.

Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας[12]. *Κάθε μέγεθος διαιρείται σε μικρότερα μεγέθη* ***επ'άπειρον,*** *και άρα δεν υπάρχει ελάχιστο μέγεθος* «ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται».
(141, 5-6)

[12] Ιδέ ενότητα 4 του παρόντος «Ανακατασκευή και Ανάλυση του Επιχειρήματος», σημεία 8, 9 .

Δημιουργείται λοιπόν η γνησίως φθίνουσα απειροακολουθία θετικών μεγεθών

$\{x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\}$ χωρίς ελάχιστο όρο, δηλαδή, $\forall i,\ i \in \mathbf{N},\ x_{i+1} < x_i$.

*Έτσι τώρα η 9-**Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας**- και η **Αρχή του Απειροαθροίσματος***

(Κρυμμένη Υπόθεση) *οδηγούν στη 10.*

Και από τη (10) εξάγεται (με τη βοήθεια της αρχής της 'Καθολικής Γενίκευσης', Universal Generalization, του κατηγορικού λογισμού[13] , η οποία είναι εφαρμόσιμη αφού το x τυχόν μέγεθος) ότι κάθε μέγεθος είναι απειρομέγεθες και έτσι έπεται το ζηνώνειο συμπέρασμα **Β** του 2ου συλλογισμού .

Τώρα, όσον αφορά στο συμπέρασμα **Α** του 2ου συλλογισμού**,** αυτό δεν εξάγεται πειστικά από τη ζηνώνεια επιχειρηματολογία, αλλά όμως η «Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας» παρέχει επιχειρήματα προς ενίσχυση της θέσης αυτής. Εδώ κρίσιμο ερμηνευτικό ρόλο διαδραματίζουν η θεωρία ορίων και μηδενικών ακολουθιών[14] (Ιδέ και Παράρτημα 2 του παρόντος-ευδόξεια μέθοδος της εξάντλησης).

Τοιουτοτρόπως, αν συνδυαστεί η «Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας» με την ευδόξεια θεωρία περί μηδενικών ακολουθιών στο «περιβάλλον» του Απειροστικού Λογισμού, τότε έπεται το συμπέρασμα Α του 2ου Συλλογισμού.

Σχόλια στην «Αρχή του Απειροαθροίσματος»: Η 'Αρχή του Απειροαθροίσματος'

[13] Cori R. and Lascar D.(2000), *Mathematical Logic*, Part I, Oxford Univ. Press, 2000, σελ 194-195.

[14] Γεωργίου Β. (2007)., *Η μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου-Αρχιμήδη*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών, 2007.

θεωρούμενη επιπόλαια είναι «ορθή». Ο κύριος λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι από ένα πεπερασμένο πλήθος μερών-μεγεθών α οσωνδήποτε μικρών, όντως είναι δυνατόν να ληφθεί-κατασκευαστεί κάποιο μέγεθος οσοδήποτε μεγάλο-πλήν όμως πεπερασμένο- και μάλιστα μεγαλύτερο από κάποιο συγκεκριμένο μέγεθος β.

Και αυτή είναι η περίφημη: **«Ιδιότητα- Άξίωμα του Αρχιμήδη»[15],** η οποία ισχύει στο σύνολο των πραγματικών Αριθμών- μεγεθών **R**:

Για κάθε ζεύγος **πραγματικών αριθμών**-μεγεθών-α,β, με τον α θετικό, υπάρχει

φυσικός αριθμός ν με την ιδιότητα $\nu \cdot \alpha > \beta$.

(ν φορές το α είναι μεγαλύτερο από το β). Συμβολικά:

$\forall \alpha \in \mathbf{R}^{+} \, \forall \beta \in \mathbf{R} \, \exists \nu \in \mathbf{N}: \ \nu \cdot \alpha > \beta$

Δηλαδή, ανεξαρτήτως πόσο μικρό είναι το α, εάν έχεις αρκετό-αναγκαίο πλήθος μεγεθών τουλάχιστον του μεγέθους του α, τότε μπορείς να κατασκευάσεις μέγεθος τουλάχιστο τόσο όσο το β (ή και μεγαλύτερο).

(*) Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η διαίσθησή μας ότι η 'Ιδιότητα-Αξίωμα' του Αρχιμήδη' εξασφαλίζει την πληρότητα-συνέχεια του συνόλου (ευθείας) των πραγματικών αριθμών **R** είναι ψευδής. Ο λόγος βρίσκεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα[16]:

Ένα διατεταγμένο αλγεβρικό σώμα (όπως οι πραγματικοί αριθμοί) είναι πλήρες, αν και μόνον αν, ισχύουν σ' αυτό:

---

[15] Moschovakis Y.(2006), *Notes on Set Theory*, Sec. Edt, Springer, 2006, σελ 210.

[16] Moschovakis Y.(2006), *Notes on Set Theory*, Sec. Edt, Springer, 2006, σελ 214.

(i) Η Ιδιότητα-Αξίωμα του Αρχιμήδη και (ii) Κάθε βασική ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Τοιουτοτρόπως, η «Ιδιότητα-Αξίωμα του Αρχιμήδη» δεν είναι ικανή από μόνη της να μας εξασφαλίσει την πληρότητα ενός διατεταγμένου σώματος (και άρα τη συνέχεια, την ανυπαρξία χασμάτων) και ειδικότερα την αρχή της πληρότητας στην «ευθεία» των πραγματικών αριθμών. Επιπροσθέτως επισημαίνουμε ότι από την «Ιδιότητα-Αξίωμα του Αρχιμήδη» δεν αποδεικνύεται η **'Αρχή του Απειροαθροίσματος'**. Ο λόγος έγκειται στο ότι για να ισχύει η εν λόγω αρχή απαιτείται η ύπαρξη ελαχίστου μεγέθους. **Κάτι που στη ζηνώνειαμη δημοκρίτεια επιχειρηματολογία δεν υφίσταται.**

Από την άλλη, εάν δεχτούμε τη δημοκρίτεια αντίληψη περί *ατμήτων,* αποδεχόμενοι έτσι ότι υπάρχει ελάχιστο μέγεθος, έστω *d (το μέγεθος του ατμήτου)*, τότε από ένα βήμα n_0 της διαίρεσης και μετά (ad infinitum) οι διαιρέσεις δημιουργούν μεγέθη ελαχίστου μήκους *d*.

Συμπερασματικά: Η Αρχή του Απειροαθροίσματος στο δημοκρίτειο μοντέλο, με την υπόθεση δηλαδή ύπαρξης ελαχίστου μεγέθους, αληθεύει. Δηλαδή:

Το απειροάθροισμα των όρων της ακολουθίας $\{x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\}$ όντως απειρίζεται, αν δεχτούμε ότι ένα από τα x_i έστω x_{n_0} έχει ελάχιστο μέγεθος έστω *d* (και άρα και $x_j = d,\ j \geq n_0$). Αυτό οδηγεί στην πάρα κάτω αρχή:

Τροποποιημένη αρχή του απειροαθροίσματος: Το άθροισμα απείρου αριθμού όρων-μεγεθών, εκ των οποίων ένας είναι ελάχιστος, έστω ο x_{n_0} (ελαχίστου μεγέθους, έστω d), είναι άπειρο, αφού και άπειρο πλήθος όρων είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι αυτού του ελαχίστου όρου x_{n_0}.

Διότι αν $x_{n_0} = \min\left\{\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\right\} = d$, τότε:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_{n_0} + \sum_{i \neq n_0}^{\infty} x_i = d + \sum_{i \neq n_0}^{\infty} x_i \geq \sum_{i=1}^{\infty} d = \infty$$

Όμως στη ζηνώνεια επιχειρηματολογία η 'Τροποποιημένη Αρχή του Απειροαθροίσματος' δεν αίρει το αδιέξοδο (δεν παρέχει διέξοδο στο Ζήνωνα), διότι δεν είναι εφαρμόσιμη, αφού η γνησίως φθίνουσα ακολουθία $\{x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\}$ γ-μερών του x, όπως επιχειρηματολογεί ο Ζήνων, **δεν έχει ελάχιστο όρο-μέγεθος**.

Αντιθέτως, συμφώνα με την «***Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας*** επειδή η προκύπτουσα γνησίως φθίνουσα απειρο-ακολουθία $\{x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\}$ δεν έχει ελάχιστο μέρος, και αν υποθέσουμε ότι ο κάθε όρος-μέγεθος της ακολουθίας είναι το πολύ ο ήμισυς του προηγουμένου, τότε με βάση την αρχή του Ευδόξου [17] : $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$

Αυτό το αποτέλεσμα ουσιαστικά αποτελεί και τη βάση της απόδειξης του **Α** συμπεράσματος του 2^{ου} Συλλογισμού του επιχειρήματος. Επιπροσθέτως, από την θεωρία του Απειροστικού Λογισμού περί συγκλίσεως απειροσειρών[18] ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$.

Και έτσι το αρχικό μέγεθος x είναι όντως το απειροάθροισμα των μερών του $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, τα οποία προκύπτουν από την απειροδιαίρεση, την διαδικασία της *ad-infinitum* διαίρεσης όπως την παρουσιάζει ο Ζήνων.

6. Συμπεράσματα

Η παραπάνω ανάλυση δηλοί ότι ο Ζήνων με στόχο να στηρίξει τις θέσεις του-ειδικότερα τον υπό εξέταση 2^{ο} συλλογισμό-υιοθετεί ταυτόχρονα στα επιχειρήματά του τις αρχές:

---

[17] Για την απόδειξη αυτού του συμπεράσματος ιδέ Παράτημα 2 του παρόντος.

[18] Η βάση της οποίας βρίσκεται στη 'μέθοδο των ροπών' του Αρχιμήδη.

1. **Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας:** «Κάθε μέγεθος διαιρείται σε μικρότερα μεγέθη **επ' άπειρον,** και άρα δεν υπάρχει ελάχιστο μέγεθος.»
2. **Αρχή του Απειροαθροίσματος: «**Το άθροισμα **απείρου αριθμού θετικών όρων** είναι άπειρο.»

Ο Ζήνων μάς παρέχει πειστικά επιχειρήματα για την ανάγκη της υιοθέτησης της 'Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας' και λόγω αυτής, της ανυπαρξίας ελαχίστου μεγέθους-όρου. Όμως χρησιμοποιώντας την 'Αρχή του Απειροαθροίσματος' συμπεραίνει ότι κάθε μέγεθος είναι άπειρο, δηλαδή δεν έχει πέρας.

I**. Εάν υιοθετήσουμε τις αρχές:**

- Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας **(Ορθή)**
- Αρχή του Απειροαθροίσματος **(Λανθασμένη)**,

η επιχειρηματολογία του Ζήνωνα βασισμένη στις πάρα πάνω δύο αρχές **είναι έγκυρη (valid) αλλά δεν είναι ορθή (unsound).**

Ο λόγος είναι ότι μία από τις προκείμενες**,** συγκεκριμένα η 'Αρχή του Απειροαθροίσματος'**,** είναι ψευδής[19].

Οφείλουμε λοιπόν να αντιμετωπίσουμε με προσοχή την 'Αρχή του Απειροαθροίσματος' και να προσεγγίσουμε το άπειρο πιο προσεκτικά. Ίσως χρειαζόμαστε διαφορετικό μοντέλο από το σύνολο των ρητών αριθμών για να νοηματοδοτήσουμε και να θεμελιώσουμε τις βασικές έννοιες του Απειροστικού λογισμού ('όριο', 'σύγκλιση', 'συνέχεια', 'πληρότητα', 'απειροάθροισμα' κ.λπ.). Και αυτό το σύνολο είναι το

[19] Ιδέ 'Σχόλια στην Αρχή του Απειροαθροίσματος', διατύπωση (*) στην ενότητα 5 του παρόντος.

σύνολο-η ευθεία των πραγματικών αριθμών, το λεγόμενο ‘συνεχές’[20].

II. Εάν υιοθετήσουμε τις αρχές:
(α) Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας **(Ορθή)**
(β) Τροποποιημένη Αρχή του Απειροαθροίσματο**ς** **(Ορθή)**,

τότε το ζηνώνειο επιχείρημα **δεν είναι έγκυρο (non-valid)** διότι η προκείμενη (α) αποκλείει την ύπαρξη ελαχίστου μεγέθους και άρα συγκρούεται (όπως έχουμε ήδη αναλύσει στην ενότητα 5 μετά το θεώρημα) με την προκείμενη (β). Έτσι η χρήση της (β) στον αυτό συλλογισμό (η οποία υποθέτει την ύπαρξη ελαχίστου μεγέθους) αποκλείεται.

Τελικό Συμπέρασμα: Οποιοδήποτε ζεύγος αρχών (I ή II) υιοθετήσουμε, το επιχείρημα του Ζήνωνα δεν είναι ορθό (unsound).

Εν κατακλείδι, στο εν λόγω επιχείρημα του Ζήνωνα, το υπόλοιπο μέγεθος οριακά-δηλαδή ad infinitum-είναι ίσο με μηδέν, και όπως πολύ εύστοχα σημείωσε ο H. Weyl[21]

«Το σημείο μέσα στο συνεχές στερείται το απαιτούμενο στήριγμα στη διαίσθηση.» Αναλυτικότερα, η μέθοδος της ‘Εξάντλησης του Ευδόξου’ και η θεωρία των απειροαθροισμάτων στο περιβάλλον του απειροστικού λογισμού αίρουν τις παραδοξότητες τόσο στο επιχείρημα

[20] Tiles M. (1989), *The Philosophy of Set Theory*, Dover Publ., σελ 12-21, 70, 93, 217.

[21] Weyl H.(1963), *Philosophy of Mathematics and natural Science*, N.Y.: Atheneum, 1963.

«Εναντίον της Πολλαπλότητας» όσο και στα λοιπά ζηνώνεια επιχειρήματα[22].

Το συμπέρασμα **Α** του ζηνώνειου 2ου συλλογισμού στο ‘Παράδοξο’ της Πολλαπλότητας ότι: **‘Κάθε πράγμα είναι «τόσο μικρό ώστε δεν έχει μέγεθος» (έχει μηδενικό μέγεθος)’** («μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος»), αποδεικνύεται υιοθετώντας την «Αρχής της Άπειρης Διαιρετότητας». Αυτό συμβαίνει διότι η ‘Μέθοδος της Εξάντλησης’ του Ευδόξου εξασφαλίζει ότι στην προκύπτουσα από την τομή του αρχικού μεγέθους γνησίως φθίνουσα απειροακολουθία $\{x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\}$ μεγεθών, «εν τέλει-οριακά» το εναπομείναν μέγεθος είναι μηδενικό και η ακολουθία (λέμε) συγκλίνει στο μηδέν: $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$.

Παράρτημα 1

Χωρία στα οποία διασώζονται τα κύρια ζηνώνεια επιχειρήματα κατά της Πολλαπλότητας, όπως τα αναπτύξαμε πάρα πάνω[23] .

Σιμπλίκιος, Σχόλια στα Φυσικά, 139, 5 – 139, 19

ἐν μέντοι τῷ συγγράμματι αὐτοῦ πολλὰ (5) ἔχοντι ἐπιχειρήματα καθ' ἕκαστον δείκνυσιν, ὅτι τῷ πολλὰ εἶναι λέγοντι (6) συμβαίνει τὰ ἐναντία λέγειν· ὧν ἕν ἐστιν ἐπιχείρημα, ἐν ᾧ δείκνυσιν ὅτι (7) εἰ πολλά ἐστι, **καὶ μεγάλα**

[22] Tiles M. (1989), *The Philosophy of Set Theory*, Dover Publ., σελ 12-21, 70, 93, 217.

[23] Simplicius, *On Aristotle Physics 1.3-4*, P. Huby and C.C.W. Taylor (trans.).
In Sorabji, R. (Ed.), Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth, 2011

ἐστὶ καὶ μικρά· μεγάλα μὲν ὥστε ἄπειρα τὸ (8) **μέγεθος εἶναι, μικρὰ δὲ οὕτως ὥστε μηθὲν ἔχειν μέγεθος** ἐν δὴ τούτῳ (9) δείκνυσιν, ὅτι οὗ μήτε μέγεθος μήτε πάχος μήτε ὄγκος μηθείς ἐστιν, οὐδ' (10) εἴη τοῦτο, "εἰ γὰρ ἄλλῳ ὄντι, φησί, προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον (11) ποιήσειεν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δὲ οὐδὲν οἷόν τε (12) εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι. καὶ οὕτως ἂν ἤδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἴη. εἰ (13) δὲ ἀπογινομένου τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττόν ἐστι, μηδὲ αὖ προσγινομένου (14) αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγενόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογενόμενον." (15) Καὶ ταῦτα οὐχὶ τὸ ὂν ἀναιρῶν ὁ Ζήνων λέγει, **ἀλλ' ὅτι μέγεθος ἔχει ἕκαστον** (16) **τῶν πολλῶν καὶ ἀπείρων τῷ πρὸ τοῦ λαμβανομένου ἀεί τι εἶναι διὰ τὴν** (17) **ἐπ' ἄπειρον τομήν·** ὃ δείκνυσι προδείξας ὅτι οὐδὲν ἔχει μέγεθος ἐκ τοῦ (18) ἕκαστον τῶν πολλῶν ἑαυτῷ ταὐτὸν εἶναι καὶ ἕν. (19)

Μετάφραση στη Νέα Ελληνική. (139, 5 – 139, 19):

«Σε αυτό το βιβλίο, το οποίο περιλαμβάνει πολλές απόπειρες στο επιχείρημα [της πολλαπλότητας], [ο Ζήνων] δεικνύει λεπτομερώς, ότι αυτός ο οποίος ισχυρίζεται ότι τα όντα είναι πολλά καταλήγει στα αντίθετα συμπεράσματα [σε άτοπον]· ένα από αυτά είναι το επιχείρημα στο οποίο δεικνύει ότι εάν υπάρχουν πολλά όντα, τότε είναι συνάμα μεγάλα και μικρά σε μέγεθος, τόσο μεγάλα ώστε να είναι άπειρα σε μέγεθος, και τόσο μικρά ώστε να μην έχουν μέγεθος. Σε αυτό δεικνύει ότι αυτό το οποίο δεν έχει κάποιο μέγεθος και κάποιο πάχος και κάποιο όγκο, εν γένει δεν θα υπάρχει. «Γιατί», λέγει, «αν το προσέθετε κανείς σε κάτι άλλο που ήδη υπάρχει, δε θα έκανε αυτό το άλλο μεγαλύτερο· γιατί αν το προσέθετε χωρίς να έχει κανένα μέγεθος, το προστιθέμενο δε θα μεγάλωνε καθόλου σε μέγεθος. Και, επομένως, αυτό που θα προσθέταμε δε θα ήταν στην πραγματικότητα τίποτε. Αν όμως, όταν αυτό αφαιρείται, το άλλο σώμα δε μικραίνει και [αν αυτό προστίθεται] το άλλο σώμα ούτε μεγαλώνει από την πρόσθεση, είναι φανερό ότι αυτό το οποίο προστέθηκε δεν ήταν τίποτε, όπως τίποτε δεν ήταν και αυτό το οποίο αφαιρέθηκε». Και ο Ζήνων ισχυρίζεται ότι αυτά δεν αναιρούν το «εν», αλλά [λέει] ότι το καθένα από αυτά τα πολλά έχει κάποιο μέγεθος και είναι άπειρο [δεν έχει πέρας], επειδή πριν αφαιρεθεί ήδη υπάρχει κάτι, μέσω της άπειρης διαιρετότητας [τομής]· και [ο Ζήνων] αυτό το αποδεικνύει, αφού έχει αποδείξει προηγουμένως ότι τίποτα δεν έχει μέγεθος, από το γεγονός ότι κάθε ένα από τα πολλά [όντα] είναι το ίδιο με τον εαυτό του και ένα».

Σιμπλίκιος, *Σχόλια στα Φυσικά*, 140, 27 - 141, 8

Καὶ τί δεῖ πολλὰ λέγειν, ὅτε καὶ ἐν αὐτῷ φέρεται τῷ τοῦ Ζήνωνος (140.27) συγγράμματι; πάλιν γὰρ δεικνύς, ὅτι εἰ πολλά ἐστι, τὰ αὐτὰ πεπερασμένα (140.28) ἐστὶ καὶ ἄπειρα, γράφει ταῦτα κατὰ λέξιν ὁ Ζήνων· "εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη (140.29) τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττονα. εἰ δὲ (140.30) τοσαῦτά ἐστιν ὅσα ἐστί, πεπερασμένα ἂν εἴη. εἰ πολλά ἐστιν, ἄπειρα τὰ (140.31) ὄντα ἐστίν. ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων (140.32) ἕτερα μεταξύ. καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί." Καὶ οὕτως μὲν τὸ κατὰ τὸ (140.33) πλῆθος ἄπειρον ἐκ τῆς διχοτομίας ἔδειξε. τὸ δὲ κατὰ μέγεθος, πρότερον (140.34) κατὰ τὴν αὐτὴν ἐπιχείρησιν. προδείξας γὰρ ὅτι, "εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος (141.1) τὸ ὄν οὐδ' ἂν εἴη", ἐπάγει, "εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν (141.2) καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. **καὶ περὶ τοῦ** (141.3) **προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος.** καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ (141.4) τι. **ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν**· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοι (141.5) οὗτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὕτως εἰ πολλά (141.6) ἐστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα, μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν (141.7) μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι.” (141.8)

Μετάφραση στη Νέα Ελληνική. (140, 27 - 141, 8)

«Και γιατί πρέπει να πω περισσότερα, αφού ήδη υπάρχει στην πραγματεία του Ζήνωνα; Γιατί και πάλιν, δείχνοντας ότι αν υπάρχουν πολλά [όντα], τα ίδια πρέπει να είναι συνάμα πεπερασμένα και άπειρα, και ο Ζήνων γράφει επί λέξει: «αν υπάρχουν τα πολλά [όντα] αναγκαία πρέπει να είναι όσα ακριβώς είναι, όχι περισσότερα και όχι λιγότερα. Αλλά αν είναι όσα είναι, θα είναι πεπερασμένα, Αν υπάρχουν όμως πολλά όντα θα είναι άπειρα. Και αυτό [συμβαίνει] επειδή πάντα θα υπάρχουν άλλα όντα μεταξύ των υπαρχόντων όντων, και πάλιν [με παρόμοιο τρόπο] άλλα όντα θα υπάρχουν μεταξύ αυτών [κ.ο.κ], και έτσι τα υπαρκτά όντα θα είναι άπειρα.» Με αυτό τον τρόπο [ο Ζήνων] έδειξε την απειρία στο πλήθος εκ της διαιρετότητας, όσο αφορά τώρα την απειρία κατά το μέγεθος, [ο Ζήνων] το έδειξε προηγουμένως με παρόμοιο επιχείρημα. Γιατί είχε δείξει αρχικά ότι «Αν το όν δεν έχει μέγεθος, δεν θα υπάρχει κιόλας», και προσθέτει, «Αν όμως το όν υπάρχει [ή: αν τα πολλά όντα υπάρχουν], είναι ανάγκη να έχει το καθένα κάποιο μέγεθος και κάποια πυκνότητα και το ένα μέρος του να απέχει από το άλλο. Και το ίδιο σκεπτικό ισχύει για το μέρος το οποίο προεξέχει· γιατί και εκείνο επίσης θα έχει μέγεθος και ένα μέρος του θα προεξέχει επίσης από αυτό. Και μάλιστα είναι το ίδιο πράγμα αν το πούμε αυτό μία φορά και αν το λέμε συνεχώς· γιατί κανένα κομμάτι αυτής της μορφής δε θα είναι το τελευταίο, ούτε θα υπάρχει κανένα κομμάτι του αυτής της μορφής που να μη συνδέεται με ένα άλλο. Συνεπώς, αν υπάρχουν πολλά όντα, πρέπει αυτά να είναι συνάμα και μικρά και μεγάλα, τόσο μικρά ούτως ώστε να μην έχουν μέγεθος και τόσο μεγάλα ώστε να είναι άπειρα [στο μέγεθος].»

Παράρτημα 2

Μέθοδος της Εξάντλησης του Ευδόξου Κνιδίου (404 -335 π.Χ.)

Ως (μερική) απάντηση στα ʻΠαράδοξαʼ του Ζήνωνα μπορεί να θεωρηθεί και η μέθοδος της εξάντλησης που δόθηκε από τον Εύδοξο τον Κνίδιο, η οποία υιοθετεί και χρησιμοποιεί την *Αρχή της Άπειρης Διαιρετότητας*.

Η Μέθοδος του Ευδόξου[24] βασίζεται στην «*Αρχή της Εξάντλησης»*.
(Πρόταση X.1, *Στοιχεία Ευκλείδη*):

*«Έστω δύο (τυχόντα) άνισα μεγέθη (του ιδίου είδους.) Αν από το μεγαλύτερο μέγεθος αφαιρεθεί ένα μέρος όχι λιγότερο από το μισό του, από το υπόλοιπο επίσης ένα μέρος όχι λιγότερο από το μισό του**, και ούτω καθεξής**, στο τέλος θα παραμείνει ένα μέγεθος μικρότερο από το μικρότερο αρχικό μέγεθος.»*

Ανάλυση Πρότασης:
Έστω αρχικό μέγεθος Α. Αν, για παράδειγμα, αφαιρούμε κάθε φορά από το υπό εξέταση μέγεθος τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο από το ήμισύ του, τότε, για $x \geq 0.5$:

[24] Γεωργίου Β. (2007), *Η μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου-Αρχιμήδη*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών, 2007.

- Το πρώτο υπόλοιπο θα είναι $A - Ax = A(1-x)$
- Το δεύτερο υπόλοιπο θα είναι $A(1-x) - A(1-x)x = A(1-x)^2$
- Το τρίτο υπόλοιπο θα είναι $A(1-x)^2 - A(1-x)^2 x = A(1-x)^3$
- Το τέταρτο υπόλοιπο θα είναι $A(1-x)^4$, κ.ο.κ.
- Προκύπτει δηλαδή μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία με λόγο $r = 1-x$ ($x \geq 0.5$)

Η οποία είναι η ακόλουθη: $T = \{A, Ar, Ar^2, Ar^3, \ldots, Ar^n, \ldots\}$

Έτσι σύμφωνα με την **«Αρχή της Εξάντλησης»,** για οσοδήποτε (μικρό) ε-μέγεθος υπάρχει κάποιος όρος της ακολουθίας ο οποίος θα είναι μικρότερος από το υπό μελέτη ε-μέγεθος.

Αλλά αυτή η πρόταση (στη θεωρία του Απειροστικού Λογισμού) αποτελεί και το
ορισμό της μηδενικής ακολουθίας. **Δηλαδή μίας ακολουθίας με όριο το μηδέν**, συμβολικά: $\lim_{n\to\infty} Ar^n = 0$

Κατά τον Εύδοξο αυτό συμβαίνει επειδή $0 < r \leq 0.5$[25]

Σχόλιο στη Θεωρία του Ευδόξου:

Η βασική αδυναμία της ευδόξειας θεωρίας είναι ότι ο Εύδοξος δεν συνέλαβε την πληρότητα της ευθείας (και ισοδύναμα του συστήματος των πραγματικών αριθμών), η οποία

[25] Σήμερα όμως έχει αποδειχτεί ότι η ακολουθία συγκλίνει-έχει όριο στο μηδέν, αν και μόνο αν $|r| < 1$.

εδράζεται στην έννοια του supremum (ελαχίστου άνω φράγματος)· έννοια στην οποία ο Εύδοξος παρότι πλησίασε εξαιρετικά, εν τέλει δεν κατάφερε να ‘ανακαλύψει’[26]. Συνεπεία αυτού, δεν μελέτησε συστηματικά τις έννοιες της συνέχειας, της σύγκλισης και των συναφών σ’αυτές εννοιών των απειροσειρών και απειροαθροισμάτων. Πράγμα το οποίο έπραξε αργότερα (αλλά με μη αυστηρά θεμελιωμένο τρόπο) ο Αρχιμήδης, και οι οποίες θεμελιωθήκαν από τον Απειροστικό λογισμό τον 17-19^{o} αιώνα. Οι έννοιες αυτές είναι απαραίτητες για την άρση των ‘παραδόξων’, αφού όπως έχει ήδη διατυπωθεί το συμπέρασμα $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$ είναι αναγκαίο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γεωργίου Β. (2007), *Η μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου-Αρχιμήδη*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών, 2007.

Cohen M.S., Zeno’s paradoxes, 2002, from http://faculty.washington.edu/smcohen/320/tmalect.htm.

Cori R. and Lascar D. (2000), *Mathematical Logic, Part I*, Oxford Univ. Press, 2000.

R. Descartes (2012). *Οι Αρχές της Φιλοσοφίας I&II,* μετφρ. Γρηγοροπούλου Β., Εκδ. Εκκρεμές, Αθήνα 2012.

Fraenkel H.(1975), *Zeno of Elea's attacks on plurality*. In Allen, R.E. and Furley, D.J. (Eds.), Studies in Presocratic Philosophy, 2, pp. 102-142. London: Routledge & Kegan Paul, 1975.

McKirahan R.D. JR., *Zeno*, in A.A.Long (1999), *The Cambridge companion to Early Greek Philosophy*, Cambridge University Press, 1999.

Moschovakis Y. (2006), *Notes on Set Theory*, Sec. Edt, Springer, 2006.

[26] Ο Εύδοξος παρείχε ένα βασικό και αξιόλογο βήμα προς την ολοκληρωμένη απόδειξη, ερειδόμενος στον ‘επαναστατικό’ του ορισμό περί της ισότητας λόγων μεγεθών (ο οποίος αποτελμάτωσε τη γεωμετρία από την αδυναμία ορισμού της ισότητας αρρήτων λόγων-incommensurable magnitudes).

Πρωτοπαπάς Δ.(2013), *Παρουσίαση της Ανθυφαιρετικής Ερμηνείας των Παραδόξων Κίνησης και των επιχειρημάτων Πολλαπλότητας του Ζήνωνα*, Διπλ. Εργ., Εθν. Καποδ. Παν. Αθηνών/Παν. Κύπρου, 2013.

Simplicius (2011), *On Aristotle Physics 1.3-4*, P. Huby and C.C.W. Taylor (trans.).

In Sorabji, R. (Ed.), Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth, 2011.

Tiles M.(1989), *The Philosophy of Set Theory*, Dover Publications, 1989.

Weyl H.(1963), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, N.Y.: Atheneum, 1963.

Title of the Article

The Logic of Zeno's Argument "Against Plurality "

Abstract

In this article we examine the logic of Zeno's Paradox/Argument "Against plurality " and we show, by analyzing Zeno's argument as it appears in Simplicius *On Aristotle Physics 139,5-139,19 and 140,27-141,8,* that there are two logical syllogisms in the argument, that both lead to contradictory conclusions (as Zeno was aiming to show). We reconstruct and analyze the second syllogism and we focus on its contradictory conclusion in order to show that the syllogism is (logically) unsound, and that this is the reason for the contradictory conclusions. We also discuss in brief the manner that "Eudoxus' Exhaustion Method" consists the fundamental technique that lies in the core of the complete resolution of the Zeno's Paradox "Against Plurality", obtained via the theory Infinitesimal Calculus.

Keywords: Eleatic Philosophy, Zeno's Paradoxes, Syllogism, Logic, Exhaustion Method.